MOVIMIENTO CIRCULAR Y GRAVITACIÓN

1. Movimiento circular uniforme (MCU)

I. Desplazamiento angular y medida de ángulos

El movimiento circular uniforme o MCU, es un movimiento en el cual se describe una circunferencia de radio R y tiene velocidad constante. En un movimiento circular, en lugar de medir distancias, es más común utilizar ángulos, que se pueden denotar de diferentes formas $(\alpha,\ \theta,\ \varphi \ldots)$. Los ángulos se miden desde un punto de referencia, al que llamaremos $\varphi_0 = 0$, como ocurría en el movimiento rectilíneo, en el cual medíamos la posición desde un punto de referencia llamado x_0.

Cuando un cuerpo se mueve a lo largo de una circunferencia, el cambio en su posición viene dado por el **desplazamiento angular**:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

Una circunferencia, o una vuelta completa, tiene 360°, o lo que es lo mismo, 2π radianes. De esta manera:

$$Media\ vuelta = 180° = \pi\ rad$$

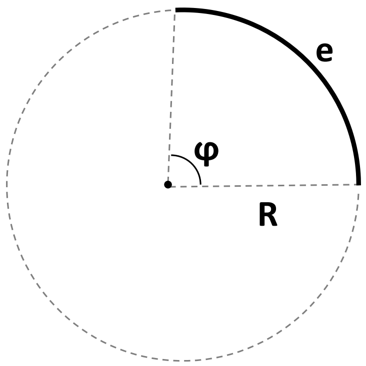
$$1\ cuarto\ de\ vuelta = 90° = \frac{\pi}{2}\ rad$$

A veces resulta más útil utilizar radianes en lugar de grados o al revés. Para entender como pasar de unas unidades a otras veamos un ejemplo:

$$45° \cdot \frac{2\pi\ rad}{360°} = 0{,}25\pi = \frac{1}{4}\pi$$

$$0{,}2\pi\ rad \cdot \frac{360°}{2\pi\ rad} = 36°$$

Por otra parte, si nos interesa conocer la distancia que ha recorrido el objeto a lo largo de la circunferencia cuando se ha desplazado un ángulo φ, podemos utilizar la relación entre el ángulo, el radio (R) y el arco de circunferencia (e, a veces también llamado s). De esta manera estamos relacionando una magnitud angular (φ) con una magnitud lineal (e), que se mide en metros.



$$\boxed{e = \varphi \cdot R}$$

II. La velocidad angular

Si consideramos un punto girando con un MCU a lo largo de una circunferencia de radio R, podemos definir la **velocidad angular** como el ángulo que describe el cuerpo en un intervalo de tiempo:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Es muy importante tener en cuenta que cuando hablamos de la velocidad angular y para calcularla utilizando la fórmula anterior el ángulo debe estar en radianes, no en grados. La velocidad angular se mide en rad/s.

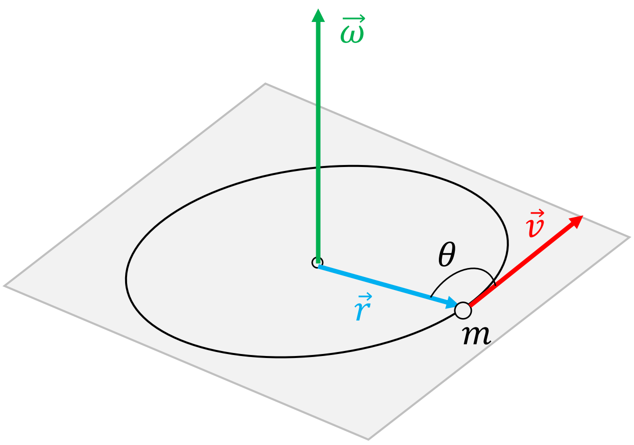
Es posible relacionar la velocidad angular con la velocidad lineal teniendo en cuenta que, para una velocidad angular dada, la velocidad lineal aumentará a medida que nos alejamos del centro de giro. Si pensamos en un disco que está girando, todos sus puntos giran con la misma velocidad angular ω, pero los puntos que están más alejados de su centro girarán con una velocidad lineal más alta que los puntos cercanos al centro. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$v = \omega \cdot R$$

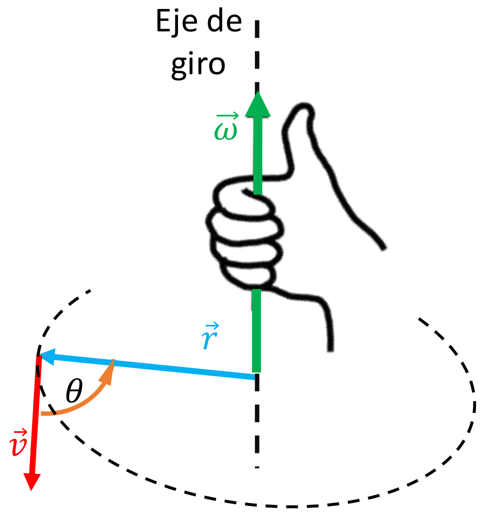
Como hemos dicho, un MCU es un movimiento a velocidad constante, es decir, tanto la velocidad lineal (v), como la velocidad angular (ω) permanecen constantes en todo el movimiento.

La velocidad angular es un vector, por tanto, tiene módulo dirección y sentido. Ya hemos visto que el módulo de ω se puede obtener de muchas formas. Ahora vamos a ver cuál es la dirección y el sentido de la velocidad angular.

En cualquier movimiento circula, el radio vector $\vec{r}$ tiene su origen en el centro de la circunferencia y su extremo en el objeto que gira. Por otra parte, la velocidad lineal $\vec{v}$ tiene su origen en el cuerpo y su dirección es tangente a la trayectoria. Ambos vectores, $\vec{r}$ y $\vec{v}$, están contenidos en el mismo plano, que es el plano de giro.



La dirección de la velocidad angular es la dirección perpendicular a ese plano de giro, y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha. Para usar esta regla, ponemos la mano derecha haciendo la señal de Ok, con los dedos "llevamos" $\vec{v}$ sobre $\vec{r}$ por el camino más corto, que es el camino marcado por el ángulo θ. Al hacer esto el pulgar nos dará la dirección y el sentido de la velocidad angular.



III. Ecuación del movimiento circular uniforme

Como ocurre con todos los tipos de movimiento que se hemos estudiado, para el MCU también existe una ecuación del movimiento que nos determina la posición del objeto en función del tiempo y su velocidad. Esta ecuación es:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

En esta ecuación φ_0 es el ángulo inicial, es decir, el ángulo con el que se inicia el movimiento, φ es el ángulo en el que está el cuerpo para un tiempo cualquiera t, y ω es la velocidad con la que gira el cuerpo.

La ecuación del movimiento para el MCU es análoga a la del MRU, lo único que cambia es que las magnitudes lineales del MRU (posición y velocidad lineal) se transforman en magnitudes angulares (ángulo y velocidad angular).

MCU $\boxed{\varphi} = \boxed{\varphi_0} + \boxed{(\omega \cdot t)}$

MRU $\boxed{x} = \boxed{x_0} + \boxed{(v \cdot t)}$

Como hemos visto para pasar de unas magnitudes a otras tenemos que multiplicar o dividir por el radio de giro (R).

$$v = \omega \cdot R \qquad e = \varphi \cdot R$$

IV. Periodo y frecuencia del MCU

El movimiento circular uniforme es un movimiento periódico, es decir, cada cierto tiempo el objeto vuelve a estar en el punto de salida. A este tiempo en el cual el movimiento se repite lo llamamos **periodo (T)** y se mide en segundos.

Por otro lado, si tomamos un cronómetro, medimos un segundo, y contamos cuantas vueltas ha dado el objeto en ese segundo, habríamos medido una magnitud que llamamos **frecuencia (f)**, que se mide en Hercios (Hz).

$$Tiempo\ en\ dar\ una\ vuelta\ \rightarrow T\ (s)$$

$$N^{\underline{o}}\ de\ vueltas\ por\ segundo\ \rightarrow f\ (Hz)$$

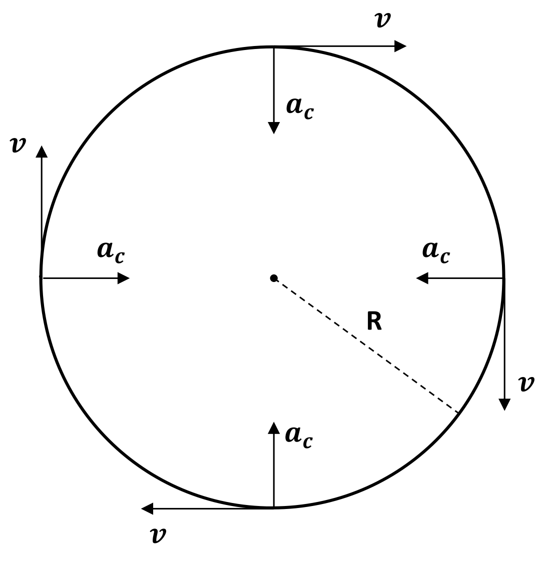
La velocidad angular, el periodo y la frecuencia de un movimiento circular uniforme están relacionados unos con otros de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

2. Fuerza centrípeta y aceleración centrípeta

I. Aceleración centrípeta

En el MCU, el módulo de la velocidad lineal es constante, pero su dirección está cambiando permanentemente, por tanto, si la velocidad cambia, es porque debe haber una aceleración que cambie dicha velocidad. A la aceleración que hace que cambie la dirección de la velocidad se la llama aceleración centrípeta (en algunos casos se la llama aceleración normal).



La aceleración centrípeta siempre apunta hacia el centro de la circunferencia y su módulo es:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

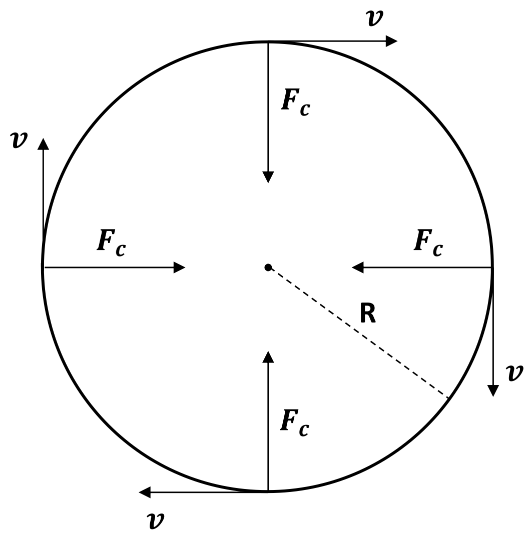
II. Fuerza centrípeta

Acabamos de ver que un movimiento circular uniforme es un movimiento en el cual el módulo de la velocidad permanece constante, pero su dirección cambiaba en todo momento a causa de la aceleración normal o centrípeta. Gracias a las leyes de Newton, ahora sabemos que, si la velocidad de un cuerpo cambia, ya sea en módulo o en dirección, es porque una fuerza está actuando sobre él.

Por tanto, a la aceleración centrípeta se le asigna una fuerza, llamada fuerza centrípeta cuya expresión se deduce de la segunda ley de Newton y de la fórmula de la aceleración centrípeta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F} = m \cdot \vec{a} \\ a_c = \dfrac{v^2}{r}\end{array}\right\} F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

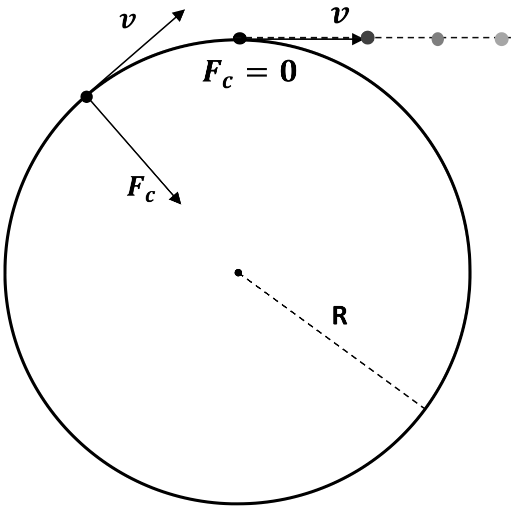
La fuerza centrípeta, o fuerza normal, es una fuerza que siempre apunta hacía el centro de giro y es la responsable de que los cuerpos giren.



La fuerza centrípeta no es una fuerza adicional del problema como puede ser el peso, la tensión etc. sino que el papel de la fuerza centrípeta lo hace otra fuerza. Por ejemplo, si cogemos una pelota atada a una cuerda y la hacemos girar con un MCU, la tensión de la cuerda será la fuerza que juegue el papel de la fuerza centrípeta y, en ese caso, diremos que la tensión es igual a la fuerza centrípeta $T = F_c$.

Los planetas, cuando giran describiendo un MCU alrededor del sol, están ligados a la estrella gracias a la fuerza gravitatoria, por tanto, en este caso, la fuerza gravitatoria es la que hace el papel de fuerza centrípeta, y tendremos $F_G = F_c$.

Si un cuerpo está sometido a una fuerza centrípeta, lo que significa que está realizando un MCU, y en un momento dado la fuerza centrípeta desaparece, el objeto dejará de describir una circunferencia y pasará a tener un movimiento rectilíneo con la velocidad lineal que tenía en el momento en el que desapareció la fuerza centrípeta. Esto es lo que ocurre si hacemos girar una pelota atada a una cuerda y la cuerda se rompe.

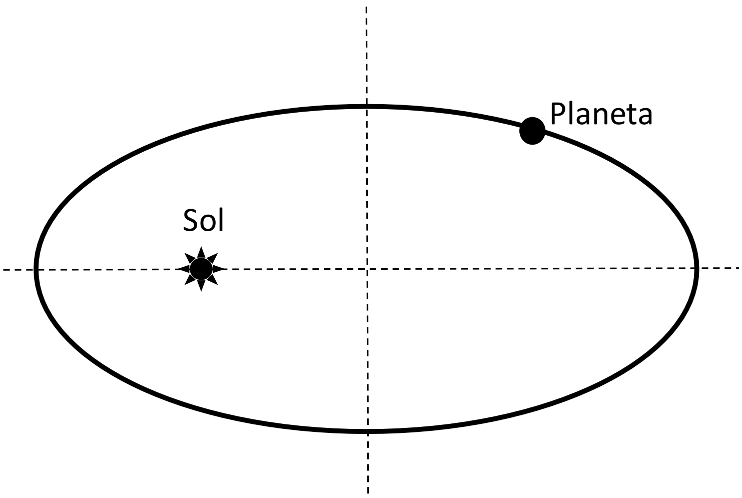


3. Las leyes de Kepler

A partir de una enorme lista de datos de observaciones astronómicas acerca de los planetas que se pueden observar desde la Tierra que había realizado T. Brahe, el astrónomo alemán J. Kepler formuló las tres leyes que describen el movimiento de los planetas alrededor del sol y de los satélites alrededor de esos planetas.

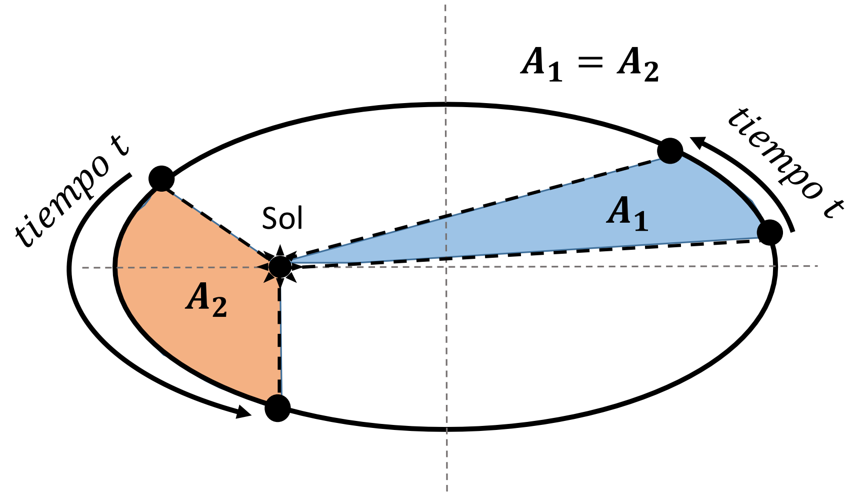
I. Primera ley de Kepler

Los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo una trayectoria elíptica, y en uno de los focos de la elipse se encuentra el sol.



II. Segunda ley de Kepler

El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. En otras palabras, para un tiempo dado, la línea que une el Sol con el planeta barre la misma área independientemente de donde se encuentre el planeta.



III. Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler relaciona la distancia media del planeta al sol con el tiempo que tarda en dar una vuelta completa. Para todos los cuerpos que giran alrededor del Sol, la relación entre el cubo del radio medio de la órbita y el cuadrado de su periodo es constante:

$$\frac{R^3}{T^2} = k = constante$$

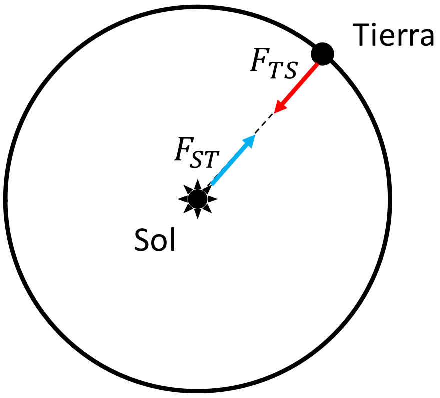
4. La ley de la gravitación universal

Isaac Newton dedujo la ley de la gravitación universal a partir de complejos cálculos matemáticos y datos astronómicos. Esta ley nos dice cómo se relacionan los cuerpos que tienen masa. Todos los cuerpos del universo que tienen masa se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Donde F es la fuerza gravitatoria, medida en Newton (N). G se llama constante de gravitación universal, que es un valor que no depende de los objetos que se consideran, ni de su posición ni velocidad ni ninguna otra cualidad, su valor es $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/s^2$. $m_1\ y\ m_2$ son las masas de los dos objetos que se estén estudiando (en Kg) y r es la distancia que los separa.

La fuerza gravitatoria siempre apunta en la dirección y sentido en el que se encuentran los planetas, es decir, es atractiva. Además, las fuerzas de atracción que ejercen entre sí dos cuerpos, por ejemplo, la Tierra y el Sol, son iguales y de sentidos contrarios, y están aplicadas en los centros de cada uno de los cuerpos, es decir, la ley de la gravitación cumple la tercera ley de Newton, como todas las fuerzas del universo.



La ley de la gravitación universal vale para todos los cuerpos que tienen masa, ya sean un planeta y el Sol, o un bolígrafo y un libro. Sin embargo, el valor de la constante de gravitación universal es muy pequeño ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/s^2$), lo que significa que la ley de la gravitación solo es apreciable entre objetos muy masivos (satélites, planetas, estrellas…)

Los objetos caen porque la Tierra los atrae. Esta fuerza, que llamamos peso, no es más que una manifestación de la ley de la gravitación. Sabemos que el peso de un cuerpo de masa m_1 es:

$$P = m_1 \cdot g$$

Si aplicamos la ley de gravitación universal al cuerpo de masa m_1 y la Tierra obtenemos:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_T}{{r_T}^2}$$

Y ahora, si igualamos ambas:

$$m_1 \cdot g = G\frac{m_1 \cdot m_T}{{r_T}^2}$$

Por tanto:

$$g = G\frac{m_T}{{r_T}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/s^2 \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg}{(6{,}37 \cdot 10^6\ m)^2} = 9{,}8\ m/s^2$$

Es decir, cuando estamos a alturas pequeñas comparadas con el radio de la Tierra ($6{,}37 \cdot 10^6\ m$), el valor de la gravedad es $g = 9{,}8\ m/s^2$. Pero si nos elevamos una altura h que sea lo suficientemente grande, el valor de la gravedad dejará de ser el mismo, y tendremos:

$$g = G\frac{m_T}{(r_T + h)^2} < 9{,}8\, m/s^2$$

La ley de la gravitación también nos permite calcular el valor de la gravedad (g) en la superficie de otros planetas utilizando su masa y su radio. Para cualquier planeta tenemos:

$$g_{Planeta} = G\frac{m_{Planeta}}{(r_{Planeta})^2}$$